

Dälnevoſtochnaia konferensia s mejdunarodnym uchastiem. – Vladivostok: İzdatelstvo Däl nauka, 2016. – 284 s.

5. Kenbai A.A., Bolegenova S.A., İſataev M.S., Tuiakbaev A.A., Nurulin R.İ. Beskontaktnyi metod izmerenia temperatury. Vestnik Akademii grajdanskoj aviasii. 2021. № 3 (22). S. 101-105.

6. T.V. Solonsova, M.İu. Kazanseva, Logistika v grajdanskoj aviasii i kosmonavtike: nauch.statä 3 str.

7. Rejim dostupa: <https://stat.gov.kz/official/industry/18/statistic/7>

8. Rejim dostupa: <https://rosstat.gov.ru/folder/11189>

DOI 10.53364/24138614\_2021\_23\_4\_14

УДК 531.383

А. И. Кобрин<sup>1</sup>, В.В. Подалков<sup>2</sup>, К.Б. Алдамжаров<sup>3</sup>, С.Ж. Карипбаев<sup>4</sup>,  
К.З. Сартаев<sup>5</sup>

<sup>1,2</sup>Московский энергетический институт, г. Москва, РФ,

<sup>3,4</sup>Академия гражданской авиации, г. Алматы, РК.

<sup>5</sup>Екибастузский инженерно-технический институт имени К. Сатпаева,  
г. Екибастуз, РК.

<sup>1</sup>E-mail: [KobrinAI@mpei.ru](mailto:KobrinAI@mpei.ru)

<sup>2</sup>E-mail: [PodalkovVV@mpei.ru](mailto:PodalkovVV@mpei.ru)\*

<sup>3</sup>E-mail: [kazbek\\_a47@mail.ru](mailto:kazbek_a47@mail.ru)

<sup>4</sup>E-mail: [kczh.1957@mail.ru](mailto:kczh.1957@mail.ru)

## ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩАЮЩИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ НА ДИНАМИКУ ШАРОВОГО ГИРОСКОПА, СНАБЖЕННОГО СИНХРОННЫМ ГИСТЕРЕЗИСНЫМ ГИРОДВИГАТЕЛЕМ

### ГАРМОНИКАЛЫҚ МОМЕНТТЕРДІҢ СИНХРОНДЫ ГИСТЕРЕЗИС ГИРО ҚОЗҒАЛТҚЫШЫМЕН ЖАБДЫҚТАЛҒАН ШАР ГИРОСКОПЫНЫҢ ДИНАМИКАСЫНА ӘСЕРІ

### INFLUENCE OF DISTURBING HARMONIC MOMENTS ON THE DYNAMICS OF A BALL GYROSCOPE EQUIPPED WITH A SYNCHRONOUS HYSTERESIS GYRO MOTOR

**Аннотация.** Для шарового гироскопа показано, что взаимодействие несбалансированности ротора и первой гармонической составляющей возмущающего момента двигателя является причиной ухода, который зависит от фазового угла вращающегося магнитного поля электродвигателя. Частота возмущения кратна частоте вращений ротора. Рассмотрено влияние на динамику гироскопа также синхронного и асинхронного составляющих момента электромагнитных сил. Из выражений уходов видно, что среднее по фазовому углу  $\theta$  вращающегося магнитного поля статора значение ухода может обратиться в ноль, что совпадают с рекомендациями, предложенными предыдущими авторами. Приведены количественные оценки погрешностей шарового гироскопа.

**Ключевые слова:** Возмущающий момент электродвигателя, несовершенства синхронного электродвигателя, амплитуды угловых переменных, «полярный» возмущающий момент синхронного гистерезисного гиродвигателя, уход гироскопа со сферической опорой.

**Аңдатпа.** Шарлы гироскоп үшін электр қозғалтқышының айналмалы магнит өрісінің фазалық бұрышына тәуелді дрейфтің себебі ротордың теңгерімсіздігі мен бұзылатын қозғалтқыш моментінің бірінші гармоникалық құрамдас бөлігінің өзара әрекеттесуі көрсетілген. Бұзылу жиілігі ротор жылдамдығының еселігі. Гироскоптың динамикасына электромагниттік күштер моментінің синхронды және асинхронды құраушыларының әсері қарастырылады. Дрейфтердің өрнектерінен статордың айналмалы магнит өрісінің фазалық бұрышы  $\theta$  бойынша орташа алынған дрейф мәні нөлге айналуы мүмкін екенін көруге болады, бұл алдыңғы авторлар ұсынған ұсыныстармен сәйкес келеді. Шар гироскопының қателіктерінің сандық бағалары берілген.

**Түйін сөздер:** Электр қозғалтқышының қоздырғыш моменті, синхронды электр қозғалтқышының жетілмегендігі, бұрыштық айнымалылардың амплитудалары, синхронды гистерезис гироскоптың «полярлық» бұзу моменті, сфералық тірегі бар гироскоптың дрейфі.

**Abstract.** For the ball gyroscope it is shown that the interaction of the unbalanced rotor and the first harmonic component of the perturbing motor torque is the cause of care, which depends on the phase angle of the rotating magnetic field of the electric motor. The frequency of perturbation is a multiple of the rotor rotation frequency. The influence of synchronous and asynchronous components of the electromagnetic forces momentum on the gyroscope dynamics is also considered. It is evident from the expressions of the escapes that the mean phase angle  $\theta$  of the rotating stator magnetic field can turn to zero, which coincides with the recommendations proposed by the previous authors. Quantitative estimates of the errors of the ball gyroscope are given.

**Key words:** perturbation torque of electric motor, imperfections of synchronous electric motor, amplitudes of angular variables, "polar" perturbation torque of synchronous hysteresis gyro motor, care of gyroscope with spherical support.

**Введение.** 1. Влияние динамического дебаланса на уход гироскопа со сферической опорой.

Исследуем влияние гармонических составляющих моментов на уход гироскопа с центральной сферической опорой. Возмущающий момент электродвигателя содержит ряд гармонических составляющих [1]. В частности, несовершенства синхронного электродвигателя вызывает угловые вибрации ротора. Частота этих возмущений кратна частоте вращения магнитного поля статора относительно ротора [2], фазы определяются фазой вращающегося магнитного поля двигателя.

Возмущающие экваториальные моменты за счет геометрических дефектов опор имеют спектр частот, кратных частоте вращения ротора.

Основными источниками вынужденных «экваториальных» колебаний оси ротора гироскопов служат динамический дебаланс ротора, «внутренние» возмущающие моменты, определяемые технологическими несовершенствами изготовления опорных узлов ротора.. В случае динамически несбалансированного гироскопа ось динамической симметрии ротора проходит через центр подвеса, но не совпадает с осью собственного вращения из-за несовершенств технологии изготовления ротора и сборки элементов гиродвигателя.

**Основная часть.** Составим уравнения движения шарового гироскопа, вызванные влиянием гармонических возмущающих моментов магнитного поля двигателя, позволяющие проанализировать движение ротора и вывести причины ухода.

В уравнении движения будем учитывать только «полярный» возмущающий момент синхронного гистерезисного гиродвигателя. Возмущающими моментами, обусловленные

технологическими несовершенствами изготовления подшипниковых опор, которые содержат широкий спектр частот, пренебрегаем.

Рассмотрим случай, когда ротор гироскопа динамически несбалансирован. Предположим, что все оси правых ортогональных трехгранников пересекаются в одной точке. При анализе кинематики гироскопа используем следующие системы координат:  $O\xi$  - правый ортогональный трехгранник, связанный с инерциальным пространством;  $Oy, O\eta$  - промежуточные правые ортогональные трехгранники;  $Oz, Ox$  - правые ортогональные трехгранники, связанные с ротором. Ось  $Oz_3$  при нулевых показаниях датчиков углового положения ротора совпадает с осью вращения магнитного поля статора синхронного двигателя. Предположим, что трехгранник  $Ox$  совпадает с главными центральными осями инерции ротора и пусть  $Ox_3$  является осью динамической симметрии ротора. Если не учитывать несовершенства. То все системы координат совпадают.

Трехгранники  $O\eta, Oy, Oz, Ox$  получаются из трехгранника  $O\xi$  последовательными поворотами на углы  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \varepsilon$  вокруг осей  $O\xi_1, O\eta_2, Oy_3$  и  $Oz_1$ , соответственно:

$$O\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xrightarrow{O\xi_1} O\eta_1 \eta_2 \eta_3 \xrightarrow{O\eta_2} Oy_1 y_2 y_3 \xrightarrow{Oy_3} Oz_1 z_2 z_3 \xrightarrow{Oz_1} Ox_1 x_2 x_3, \quad (1.1)$$

т.е. в виде произведения матриц  $S_{\varepsilon 321}^* = S_{\varepsilon}^* S_3^* S_2^* S_1^*$ .

Здесь  $\Gamma_1, \Gamma_2, \varepsilon$  - малые углы поворота;  $S_1^*, S_2^*, S_3^*, S_{\varepsilon}^*$  - матрицы поворотов систем координат. Величина угла  $\varepsilon$ , определяемая между осями собственного вращения и динамической симметрии в современных гироскопических приборах мала.

Обозначим через  $\Omega_{1x}, \Omega_{2x}, \Omega_{3x}$  проекции абсолютной угловой скорости ротора на оси трехгранника  $Ox$ .

Используя последовательности (1.1) можно определить проекции абсолютной угловой скорости ротора на оси системы координат  $Ox_1 x_2 x_3$ . Предположим, что угловая скорость ротора  $\dot{\Gamma}_3$  отличается от постоянной величины угловой скорости вращения магнитного поля статора  $\Omega_0$  на малую величину  $\dot{\theta}$ .  $\theta$  - называется углом синхронизации, т.е. это есть угол поворота ротора относительно магнитного поля статора.

Напишем абсолютную угловую скорость ротора в проекциях на оси трехгранника  $x$ , связанной с осями динамической симметрии ротора

$$\begin{bmatrix} \Omega_{1x} \\ \Omega_{2x} \\ \Omega_{3x} \end{bmatrix} = S_{\varepsilon}^* S_3^* S_2^* S_1^* \begin{bmatrix} \Omega_{1\xi} \\ \Omega_{2\xi} \\ \Omega_{3\xi} \end{bmatrix} + S_{\varepsilon}^* S_3^* S_2^* \begin{bmatrix} \dot{\Gamma}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + S_{\varepsilon}^* S_3^* \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\Gamma}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + S_{\varepsilon}^* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Gamma}_3 \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Здесь  $\Omega_{1\xi}, \Omega_{2\xi}, \Omega_{3\xi}$  - проекции угловой скорости основания,  $\dot{\Gamma}_3 = \Omega_c + \dot{\theta}$  - угловая скорость ротора.

Удержим в разложениях нелинейной угловой скорости ротора в проекциях на оси трехгранника  $x$  линейные слагаемые и нелинейные члены второго порядка малости по  $\Gamma_1, \dot{\Gamma}_1, \Gamma_2, \dot{\Gamma}_2, \varepsilon$  и  $\theta, \dot{\theta}$ . Предположим, что гироскоп установлен на неподвижном основании. Тогда угловая скорость примет вид

$$\begin{aligned} \Omega_{1x} &= \dot{\Gamma}_1 \cos \Gamma_3 + \dot{\Gamma}_2 \sin \Gamma_3, & \Omega_{2x} &= \dot{\Gamma}_3 \varepsilon + \dot{\Gamma}_2 \cos \Gamma_3 - \dot{\Gamma}_1 \sin \Gamma_3, \\ \Omega_{3x} &= (\dot{\Gamma}_1 \sin \Gamma_3 - \dot{\Gamma}_2 \cos \Gamma_3) \varepsilon + \dot{\Gamma}_1 \Gamma_2 + \dot{\Gamma}_3. \end{aligned} \quad (1.3)$$

При составлении уравнений движения используем системы координат и кинематические соотношения, приведенные выше.

Введем дополнительные обозначения:  $M_{1\xi}^*, M_{2\xi}^*, M_{3\xi}^*$  - проекции момента, приложенного к ротору, на оси трехгранника  $\xi$ ;  $A, B, C$  - главные центральные моменты инерции ротора, направленные по экваториальным и полярной осям;  $H_{1x}, H_{2x}, H_{3x}$  и  $H_{1\xi}, H_{2\xi}, H_{3\xi}$  - проекции вектора кинетического момента  $H^*$  на оси трехгранников  $x$  и  $\xi$ , соответственно.

Так как основной причиной погрешности гироскопа является «полярный» возмущающий момент, то этот момент  $\mathbf{M}$  может быть представлен в виде векторной суммы составляющих, направленных по осям правых ортогональных трехгранников  $O\xi, Oz, Ox$ :

$$\mathbf{M}^* = M_{\xi}^* \mathbf{i} + M_z^* \mathbf{j} + M_x^* \mathbf{e}, \quad (1.4)$$

причем считаем, что  $M_{1\xi}^*, M_{2\xi}^* \ll M_{3\xi}^*; M_{1z}^*, M_{2z}^* \ll M_{3z}^*; M_{1x}^*, M_{2x}^* \ll M_{3x}^*$ .

В дальнейшем будем рассматривать составляющие возмущающего момента  $\mathbf{M}^*$  электродвигателя, представляемые в виде сумм гармонических слагаемых с частотами, кратными частоте вращения магнитного поля статора  $\Omega_c$ , и фазами  $Q_l$ , определяемыми фазой вращающегося магнитного поля [1]:

$$\mathbf{M}^* = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{M}_l^* \cos(l\Omega_c T + Q_l), \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{M}_l^* = -V\mathbf{I} \times \mathbf{H}^* \sin \theta^0$ ;  $H^*, Q_l$  - амплитуда напряженности и фаза 1-й гармонической составляющей;  $\mathbf{I}$  - вектор постоянной намагниченности;  $V$  - объем активной части ротора.

Проекции вектора кинетического момента  $H_{\xi}^*, H_x^*$  связаны следующим образом:

$$\begin{pmatrix} H_{1\xi}^* \\ H_{2\xi}^* \\ H_{3\xi}^* \end{pmatrix} = E_{\xi x} \begin{pmatrix} H_{1x}^* \\ H_{2x}^* \\ H_{3x}^* \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

$E_{\xi x}$  - матрица преобразования, которая при учете членов второго порядка малости относительно  $\Gamma_1, \dot{\Gamma}_1, \Gamma_2, \dot{\Gamma}_2, \varepsilon$  и  $\theta, \dot{\theta}$  представляется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \cos \Gamma_3 & (-\sin \Gamma_3 + \Gamma_2 \varepsilon) & (\varepsilon \sin \Gamma_3 + \Gamma_2) \\ (\Gamma_1 \Gamma_2 \cos \Gamma_3 + \sin \Gamma_3) & (-\Gamma_1 \Gamma_2 \sin \Gamma_3 + \cos \Gamma_3 - \Gamma_1 \varepsilon) & (-\varepsilon \cos \Gamma_3 - \Gamma_1) \\ (-\Gamma_2 \cos \Gamma_3 + \Gamma_1 \sin \Gamma_3) & (\Gamma_2 \sin \Gamma_3 + \Gamma_1 \cos \Gamma_3 + \varepsilon) & (-\Gamma_2 \varepsilon \sin \Gamma_3 - \Gamma_1 \varepsilon \cos \Gamma_3 + \Gamma_4) \end{pmatrix}$$

где  $H_{1x}^* = A\Omega_{1x}, H_{2x}^* = B\Omega_{2x}, H_{3x}^* = C\Omega_{3x}$  - проекции вектора  $\mathbf{H}^*$  на оси динамической симметрии ротора,  $\Gamma_4 = 1 - (\varepsilon^2 + \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)/2$ .

Используя теорему об изменении кинетического момента, запишем уравнения движения ротора в проекциях на оси трехгранника  $O\xi_1 \xi_2 \xi_3$ :

$$\dot{H}_{n\xi}^* = M_{n\xi}^*, n = 1, 2, 3. \quad (1.7)$$

Причиной возникновения моментов  $M_{n\xi}^*$  в правой части уравнения (3.7) является «полярный» возмущающий момент электродвигателя.

Если подставим значения проекции угловой скорости ротора на оси динамической симметрии в уравнения движения, то в развернутом виде система уравнений движения (1.7) имеет вид:

$$\begin{aligned} d/dT \{ A[\dot{\Gamma}_1 \cos^2 \Gamma_3 + \dot{\Gamma}_2 \sin 2\Gamma_3/2] + B[-\varepsilon \dot{\Gamma}_3 \sin \Gamma_3 - \dot{\Gamma}_2 \sin 2\Gamma_3/2 + \dot{\Gamma}_1 \sin^2 \Gamma_3] + \\ C[\varepsilon \dot{\Gamma}_3 \sin \Gamma_3 + \Gamma_2 \dot{\Gamma}_3] \} = M_{1\xi}, \\ d/dT \{ A[\dot{\Gamma}_1 \sin 2\Gamma_3/2 + \dot{\Gamma}_2 \sin^2 \Gamma_3] + B[\varepsilon \dot{\Gamma}_3 \cos \Gamma_3 + \dot{\Gamma}_2 \cos^2 \Gamma_3 - \dot{\Gamma}_1 \sin 2\Gamma_3/2] + \\ C[-\varepsilon \dot{\Gamma}_3 \cos \Gamma_3 - \Gamma_1 \dot{\Gamma}_3] \} = M_{2\xi}, \\ d/dT \{ A[-\dot{\Gamma}_1 \Gamma_2 \cos^2 \Gamma_3 + \dot{\Gamma}_1 \Gamma_1 \sin 2\Gamma_3/2 - \Gamma_2 \dot{\Gamma}_2 \sin 2\Gamma_3] + B[\varepsilon \Gamma_2 \dot{\Gamma}_3 \sin \Gamma_3 + \varepsilon \Gamma_1 \dot{\Gamma}_3 \cos \Gamma_3 + \\ \varepsilon^2 \dot{\Gamma}_3 + \Gamma_2 \dot{\Gamma}_2 \sin 2\Gamma_3/2 + \Gamma_1 \dot{\Gamma}_2 \cos^2 \Gamma_3 + \varepsilon \dot{\Gamma}_2 \cos \Gamma_3 - \dot{\Gamma}_1 \Gamma_2 \sin^2 \Gamma_3 - \dot{\Gamma}_1 \Gamma_1 \sin 2\Gamma_3/2 - \varepsilon \dot{\Gamma}_1 \sin \Gamma_3] + \\ C[\varepsilon \dot{\Gamma}_1 \sin \Gamma_3 - \varepsilon \dot{\Gamma}_2 \cos \Gamma_3 + \dot{\Gamma}_1 \Gamma_2 - \varepsilon \Gamma_2 \dot{\Gamma}_3 \sin \Gamma_3 - \varepsilon \Gamma_1 \dot{\Gamma}_3 \cos \Gamma_3 + \dot{\Gamma}_3 \cos \Gamma_1 \cos \Gamma_2 \cos \varepsilon] \} = M_{3\xi}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

После подстановки (1.3)-(1.6) в (1.8), приведем уравнения движения ротора (1.8) к безразмерной форме, проделав нормализацию входящих в нее переменных [11]:

$$\Gamma_1 = \Gamma_* \gamma_1^*, \Gamma_2 = \Gamma_* \gamma_2^*, \theta = \Gamma_* \theta, \Omega_{1x} = \Omega_* \omega_{1x}, \Omega_{2x} = \Omega_* \omega_{2x}, \Omega_{3x} = \Omega_{3*} \omega_{3x}, A = C_* a, B = C_* b, C = C_* c, H_{1\xi}^* = H_{\xi*} h_{1\xi}, H_{2\xi}^* = H_{\xi*} h_{2\xi}, H_{3\xi}^* = H_{\xi*} h_{3\xi}, M_{n\xi}^* = M_* m_{n\xi} \quad (n = 1, 2, 3), T = T_* t, M_{3x} = M_* m_{3x}. \quad (1.9)$$

Характерные значения величин переменных выберем следующим образом

$$T_* = \frac{1}{\Omega_c}, \Omega_* = \Gamma_* \Omega_c, \Omega_{3*} = \Omega_c, C_* = C, H_* = H^* = C_* \Omega_{3*}, H_{\xi_*} = \varepsilon H_*, M_* = H^* \Omega_* \quad (1.10)$$

Амплитуды угловых переменных  $\Gamma_1, \Gamma_2, \theta$  в силу самого назначения гироскопической системы являются величинами порядка единиц долей угловой минуты. Поэтому выберем  $\Gamma_* = \varepsilon$ . Характерные значения остальных переменных выберем таким образом, чтобы значения их безразмерных величин не превосходили величин порядка единицы.

Предположим, что разность экваториальных моментов инерции ротора мала:  $a-b = \varepsilon e$ , где  $e$  – безразмерная величина порядка единицы.

Учитывая нормализацию переменных (1.9) и характерные значения (1.10), напомним уравнения (1.8) в нормализованном виде

$$\begin{aligned} d/dt\{a\dot{\gamma}_1 - \varepsilon\dot{\gamma}_1 \sin^2(t + \varepsilon\gamma_3) + 0.5\varepsilon e \dot{\gamma}_2 \sin 2(t + \varepsilon\gamma_3) + \varepsilon\dot{\gamma}_3(c - a)\sin(t + \varepsilon\gamma_3) + c\gamma_2 + c\varepsilon\gamma_2\dot{\gamma}_3 - (a - \varepsilon e)\sin(t + \varepsilon\gamma_3) + c\sin(t + \varepsilon\gamma_3)\} &= m_{1\xi}, \\ d/dt\{1/2\varepsilon e \dot{\gamma}_1 \sin 2(t + \varepsilon\gamma_3) + a\dot{\gamma}_2 - \varepsilon\dot{\gamma}_2 \cos^2(t + \varepsilon\gamma_3) + \varepsilon\dot{\gamma}_3(a - c)\cos(t + \varepsilon\gamma_3) - c\gamma_1 - c\varepsilon\gamma_1\dot{\gamma}_3 + (a - \varepsilon e)\cos(t + \varepsilon\gamma_3) - c\sin(t + \varepsilon\gamma_3)\} &= m_{2\xi}, \\ d/dt\{\varepsilon\dot{\gamma}_1(c - a)\sin(t + \varepsilon\gamma_3) + \varepsilon\dot{\gamma}_2(a - c)\cos(t + \varepsilon\gamma_3) + c\dot{\gamma}_3 + \varepsilon\gamma_1(a - c)\cos(t + \varepsilon\gamma_3) + \varepsilon\gamma_2(a - c)\sin(t + \varepsilon\gamma_3) - c\varepsilon\gamma_1^2 - c\varepsilon\gamma_2^2 - \dot{\gamma}_1\gamma_2(a - c)\varepsilon + a\varepsilon\gamma_1\dot{\gamma}_2\} &= m_{3\xi}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Решение уравнений (1.11), содержащий малый параметр  $\varepsilon$ , будем отыскивать в виде разложения по степеням малого параметра:

$$\gamma_n^* = \gamma_n^{(0)} + \varepsilon\gamma_n^{(1)} + \dots, n = 1, 2, 3. \quad (1.12)$$

Конечное число разложений (1.12) на ограниченном времени дает асимптотическое приближение для решения исходной системы.

В нормализованном виде вектор возмущающего момента представляется в виде:

$$\mathbf{m} = m_\xi \mathbf{i} + m_z \mathbf{j} + m_x \mathbf{e}, \quad (1.13)$$

$$m_{1\xi}^0, m_{2\xi}^0 \ll m_{3\xi}^0; m_{1z}^0, m_{2z}^0 \ll m_{3z}^0; m_{1x}^0, m_{2x}^0 \ll m_{3x}^0.$$

В уравнении (1.11) сократим общий множитель  $\varepsilon$  и приравнявая слагаемые при нулевой степени  $\varepsilon$ , напомним уравнения нулевого приближения

$$a\dot{\gamma}_1^{(0)} + \dot{\gamma}_2^{(0)} = (a - 1)\text{cost}, \quad (1.14)$$

$$a\ddot{\gamma}_2^{(0)} + \dot{\gamma}_1^{(0)} = (a - 1)\text{sint},$$

$$\ddot{\theta}^{(0)} = m_3^0, \text{ где } m_3^0 = \sum_{l=1}^{\infty} m_l \cos(lt + Q_l),$$

и приравнявая в (1.11) слагаемые при первой степени  $\varepsilon$ , получим уравнения первого приближения

$$a\dot{\gamma}_1^{(1)} + \dot{\gamma}_2^{(1)} = -d/dt \left\{ e \left[ 0.5\dot{\gamma}_2^{(0)} \sin 2t - \dot{\gamma}_1^{(0)} \sin^2 t + \text{sint} \right] - (a - 1)(\dot{\theta}^{(0)} \text{sint} + \theta^{(0)} \text{cost}) + \gamma_2^{(0)} \dot{\theta}^{(0)} \right\} + m_{1\xi}^{(1)},$$

$$a\dot{\gamma}_2^{(1)} - \dot{\gamma}_1^{(1)} = -d/dt \left\{ e \left[ 0.5\dot{\gamma}_1^{(0)} \sin 2t - \dot{\gamma}_2^{(0)} \cos^2 t - \text{cost} \right] + (a - 1)(\dot{\theta}^{(0)} \text{cost} - \theta^{(0)} \text{sint}) - \gamma_1^{(0)} \dot{\theta}^{(0)} \right\} + m_{2\xi}^{(1)},$$

$$\ddot{\theta}^{(1)} = -d/dt \left\{ (a - 1) \left[ (\gamma_2^{(0)} - \dot{\gamma}_1^{(0)}) \text{sint} + (\dot{\gamma}_2^{(0)} + \gamma_1^{(0)}) \text{cost} - \dot{\gamma}_1^{(0)} \gamma_2^{(0)} \right] - \left[ (\gamma_1^{(0)})^2 + (\gamma_2^{(0)})^2 \right] + a\gamma_1^{(0)} \dot{\gamma}_2^{(0)} \right\} + m_{3\xi}^{(1)}, \quad (1.15)$$

где  $m_{1\xi}^{(1)} = m_{3z}^{(0)} \gamma_2^{(0)}$ ,  $m_{2\xi}^{(1)} = -m_{3z}^{(0)} \gamma_1^{(0)}$ ,  $m_{3\xi}^{(1)} = m_3^{(1)}$ , так как проекции момента  $m_{3\xi} \mathbf{e}_{3\xi}$  на оси  $O\xi_1, O\xi_2$  равны нулю, а при проекции момента  $m_{3x} \mathbf{e}_{3x}$  на оси  $O\xi_1, O\xi_2$ , коэффициенты перед ними обращаются в нуль.

Решение уравнений движения нулевого приближения (1.14) имеют вид:

$$\begin{aligned}\gamma_1^{(0)} &= -\cos t, \\ \gamma_2^{(0)} &= -\sin t, \\ \theta^{(0)} &= \sum_{l=1}^{\infty} (m_l / l^2) \cos(lt + Q_l).\end{aligned}\quad (1.16)$$

В уравнении первого приближения (1.15) линейные и квадратичные по нулевым приближениям слагаемые переменных  $\gamma_1^{(0)}, \gamma_2^{(0)}, \theta^{(0)}$  уже известны. Постоянные составляющие этих слагаемых определяют частное решение системы (1.11) вида  $\dot{\gamma}_1^{(1)}, \dot{\gamma}_2^{(1)}$ .

Вычислим явные выражения  $\dot{\gamma}_1^{(1)}$  и  $\dot{\gamma}_2^{(1)}$  через параметры гироскопа и возмущения. Кроме того, далее будем учитывать только первые гармоники возмущения  $m_3^{(0)}$ .

Подставляя (1.16) в (1.15) и усредняя выражения по времени  $t$ , определяем уход шарового гироскопа:

$$\langle \dot{\gamma}_1^{(1)} \rangle = -(m_{1z} \cos Q_1) / 2, \quad \langle \dot{\gamma}_2^{(1)} \rangle = (m_{1z} \sin Q_1) / 2 \quad (1.17)$$

Уход возникает при взаимодействии динамического дебаланса ротора с первой гармонической составляющей «полярного» магнитного момента. Уход не зависит от малой динамической несимметрии ротора.

В работах [13, 2] замечены, что уходы гироскопа с гидродвигателем гистерезисного типа меняются от запуска к запуску или при кратковременных перебоях питания. Высказаны предположения о связи этого явления с изменением фазового угла вращающегося магнитного поля статора относительно ротора.

Уход может быть объяснен квадратичным взаимодействием двух видов угловых вибрации ротора, возникающих из-за несовершенства опорных узлов и электродвигателя.

Постоянные составляющие скоростей ухода гироскопа гармонически зависят от фазового угла вращающегося магнитного поля статора относительно ротора, что согласуется с результатами работ [5, 8, 9, 12], в которых рассматривались другие типы приборов.

Переходя в (1.17) к ненормализованному виду, получим

$$\langle \dot{I}_1 \rangle = -(M_{1z} / (2H)) \varepsilon \cos Q_1 = -7.1 \times 10^{-4} \varepsilon \cos Q_1 \text{ (с}^{-1}\text{)}, \quad \langle \dot{I}_2 \rangle = 7.1 \times 10^{-4} \varepsilon \sin Q_1 \text{ (с}^{-1}\text{)} \quad (1.18)$$

При оценке числовых значений ухода гироскопа с центральной сферической порой, использованы следующие характеристики [5]:

$$M_{1z} = 9.81 \times 10^{-5} \text{ (кгм}^2\text{с}^{-2}\text{)}, \quad H = 0.069 \text{ (кгм}^2\text{с}^{-1}\text{)}. \quad (1.19)$$

### 1.2 Уход шарового гироскопа под действием синхронного и асинхронного моментов.

В общем случае вращающий момент как от угла поворота ротора относительно магнитного поля статора, так и от угловой скорости этого поворота.

Наряду с возмущающим моментом (1.5) будем учитывать действующие по оси ротора синхронную  $K_c \theta$  и асинхронную  $N_0 \dot{\theta}$  составляющие момента электромагнитных сил, где  $K_c$  - крутизна моментной характеристики синхронного привода,  $N_0$  - коэффициент демпфирования. Дополнительно проделав нормализацию величин:  $N_0 = N_* n_0, K_c = K_* k_c$ , выберем характерные значения этих переменных следующим образом:  $K_* = C_* \Omega_c^2, N_* = \varepsilon_1 C_* \Omega_c$ , где  $\varepsilon_1 = \varepsilon^{1/2}$ . Третье уравнение системы (1.15) можно теперь записать в безразмерной форме следующим образом:

$$\theta^{(0)} = m_3^0, \quad \text{где } m_3^0 = \sum_{l=1}^{\infty} m_l \cos(lt + Q_l) - n_0 \dot{\theta}^{(0)} - k_c \theta^{(0)}, \quad (1.20)$$

где  $k_c$  - собственная частота малых колебаний ротора относительно магнитного поля статора.

Решение уравнений (1.15) представим в виде:

$$\theta^{(0)} = d e_0^{-(n/2)t} \sin(\sqrt{k_c - n_0^2 t / 4} + \delta) + \sum_{l=1}^{\infty} (k_c - l^2) m_l \cos(lt + Q_l) / [(k_c - l^2) + n_0^2 l^2] + \sum_{l=1}^{\infty} n_0 l m_l \sin(lt + Q_l) / [(k_c - l^2) + n_0^2 l^2], \quad (1.21)$$

где  $d_0, d_1$  – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий. При  $l = 1$ , подставляя (1.21) в (1.15) и усредняя по  $t$ , определяем из первых двух уравнений (1.15) постоянные составляющие ухода:

$$\langle \dot{\gamma}_1^{(1)} \rangle = l \{ -(k_c + 1)n_0 \sin Q_1 / 2 + (3k_c - 2k_c^2 - 2n_0^2 - 1) \cos Q_1 \}, \quad (1.22)$$

$$\langle \dot{\gamma}_2^{(1)} \rangle = l \{ (1 - k_c) \sin Q_1 + [(k_c + 1)n_0 \cos Q_1] / 2 \},$$

где  $l = m_{1z} / \{ 2[(k_c - 1)^2 + n_0^2] \}$ .

Запишем (3.22) в размерных величинах:

$$\langle \dot{I}_2 \rangle = D \{ (1 - I_1) \varepsilon \sin Q_1 + [(I_1 + 1) I_2 \varepsilon \cos Q_1] / 2 \},$$

$$\langle \dot{I}_1 \rangle = D \{ -[(I_1 + 1) I_2 \varepsilon \sin Q_1] / 2 + [3I_1 - 2(I_1)^2 - 2(I_2)^2 - 1] \varepsilon \cos Q_1 \}, \quad (1.23)$$

где  $D = M_{1z} / \{ 2H[(I_1 - 1)^2 + (I_2)^2] \}$ ;  $I_1 = \lambda^2 / \Omega_c^2$ ;  $I_2 = I_3 / \varepsilon_1$ ;  $I_3 = N_0 / H$ ;  $\lambda^2 = K_c / C$  – собственная частота малых колебаний ротора относительно магнитного поля статора в размерном виде.

Крутизна моментной характеристики синхронного привода  $K_c$  определяется в виде  $K_c = I H_0^\infty \cos \theta^{(0)}$ . Здесь  $H_0^\infty$  – постоянное слагаемое напряженности магнитного поля статора,  $\theta^{(0)}$  – начальный угол синхронизации.

Значения  $N$  и  $\lambda$  изменяются в пределах от  $10^{-8}$  до  $10^{-3}$  (Нмс) [6] и  $0.05 \dots 0.1$  [7] или  $10 \dots 20$  (Гц) [6], соответственно. Учитывая (3.18) и принимая  $\Omega_c = 5.0 \times 10^3$  ( $c^{-1}$ ),  $\lambda^2 = 1.6 \times 10^4$  ( $c^{-2}$ ) (20Гц),  $N_0 / H = 1.4 \times 10^{-2}$ , оценим уход (1.23)

$$\langle \dot{I}_1 \rangle = -10^{-4} (0.02 \varepsilon \sin Q_1 + \varepsilon \cos Q_1) (c^{-1}),$$

$$\langle \dot{I}_2 \rangle = 10^{-6} (0.3 \varepsilon \sin Q_1 + 2 \varepsilon \cos Q_1) (c^{-1}). \quad (1.24)$$

Выражения угловых скоростей ухода (1.18) и (1.24) шарового гироскопа с динамически несбалансированным ротором содержат безразмерный малый параметр  $\varepsilon$ , определяющий угол между осью собственного вращения и динамической симметрии ротора. Эти две оси не совпадают из-за несовершенств технологии изготовления ротора и сборки элементов гироскопа. Величина постоянного угла  $\varepsilon$  в современных гироскопических приборах мала. Она составляет порядка  $10^{-4} \div 10^{-5}$  [7]. Подставляя значение  $\varepsilon = 10^{-5}$  в выражение ухода (3.18) шарового гироскопа, которые зависят от первой гармонической составляющей возмущающего момента электродвигателя и фазового угла  $Q_1$  первой гармоники возмущающего момента, получим:

$$\langle \dot{I}_1 \rangle = -7.1 \times 10^{-9} \cos Q_1 (c^{-1}),$$

$$\langle \dot{I}_2 \rangle = 7.1 \times 10^{-9} \sin Q_1 (c^{-1}). \quad (1.25)$$

В работе [5] получена угловая скорость ухода гироскопа в кардановом подвесе с динамически несбалансированным ротором при неподвижном основании. Моменты относительно осей внешнего и внутреннего колец и ротора считаются равными нулю. При значениях угловой скорости, дебаланса, полярного и экваториального моментов инерции ротора, соответственно, равных

$3045.8$  ( $c^{-1}$ ),  $10^{-5}$ ,  $0.324 \times 10^{-3}$  ( $кгм^2$ ),  $0.196 \times 10^{-3}$  ( $кгм^2$ ), уход составляет  $-10^{-6}$  ( $c^{-1}$ ).

Там же угловая скорость ухода гироскопа получена без учета влияния возмущающего момента электродвигателя.

Если в выражении угловой скорости ухода такого гироскопа, полученном в работе [5], с динамически несбалансированным ротором при неподвижном основании, не учесть влияние возмущающего момента электродвигателя, то выражение ухода в точности совпадает с уходом, полученным в работе [7] и уход составляет  $-8 \times 10^{-9}$  ( $c^{-1}$ ). При этом угловая скорость, дебаланс, полярный и экваториальный моменты инерции имеют, соответственно, следующие значения

$2500$  ( $c^{-1}$ ),  $10^{-5}$ ,  $0.03924 \times 10^{-3}$  ( $кгм^2$ ),  $0.02943 \times 10^{-3}$  ( $кгм^2$ ).

Уход, полученный в работе [5] для интегрирующего поплавокowego гироскопа с несбалансированным ротором зависит от первой гармонической составляющей возмущающего момента электродвигателя и фазового угла  $Q_1$  первой гармоники этого момента и составляет  $5 \times 10^{-11} \sin(Q_1 + \Psi)$  ( $c^{-1}$ ). Здесь  $\Psi$  зависит от коэффициента вязкого трения.

Динамические реакции вследствие погрешностей в опорах обнаруживаются в процессе сборки и частично устраняются динамическим уравниванием.

За рубежом имеются модели балансировочных машин, специально приспособленных для уравнивания небольших роторов и снабженных установками для тарированного сверления.

В балансировочном полуавтомате фирмы Деккер тип 211 (США), в котором сверлильная головка смонтирована непосредственно на основании балансировочной машины, можно динамически уравнивать роторы гироскопов массой 160-600 (г) с точностью 0.3 (мкм) по смещению центра масс [14].

Таким образом, в данном разделе составлены уравнения движения в форме уравнений кинетических моментов для ротора в проекциях на оси неподвижного трехгранника, связанного со статором гироскопа. Момент, создаваемый электродвигателем гистерезисного типа по собственной оси, не постоянно, он зависит от динамического дебаланса ротора и несовершенства питания двигателя. Для шарового гироскопа показано, что взаимодействие несбалансированности ротора и первой гармонической составляющей возмущающего момента двигателя является причиной ухода, который зависит от фазового угла вращающегося магнитного поля электродвигателя. Частота возмущения кратна частоте вращений ротора. Рассмотрено влияние на динамику гироскопа также синхронного и асинхронного составляющих момента электромагнитных сил. Из выражений уходов видно, что среднее по фазовому углу  $\theta$  вращающегося магнитного поля статора значение ухода может обратиться в ноль, что совпадает с рекомендациями, предложенными предыдущими авторами. Приведены количественные оценки погрешностей шарового гироскопа.

#### Список использованных источников

1. Делекторский Б.А., Новожилов И.В. К оценке уходов гироскопа в зависимости от фазового угла вращающегося магнитного поля синхронного гироскопа // Изв. АН СССР. Сер.: Механика твердого тела. – 1984. – №2. – С.3-7.
2. Исследование неустойчивости дрейфа гироскопа от изменения фазы вращения ротора / Делекторский Б.А., Правоторов Е.А., Соболева Е.Б., Тарасов В.Н., Яшукова В.В. // Тр. Моск. энерг. ин-та. – 1978. – Вып.361. – С. 34-41.
3. Исследование неустойчивости дрейфа гироскопа от изменения фазы вращения ротора / Делекторский Б.А., Правоторов Е.А., Соболева Е.Б., Тарасов В.Н., Яшукова В.В. // Тр. Моск. энерг. ин-та. – 1978. – Вып.361. – С. 34-41.
4. Астахов В. И. К расчету силового воздействия магнитного поля на тела, несущие токи // Изв. Вузов. Электромеханика – 1984. – №10. – С.5-14
5. Копылов И.А. Погрешности гироскопических приборов, определяемые несовершенствами электродвигателя ротора // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. М., 1986.
6. Делекторский Б.А., Новожилов И.В. // К оценке уходов гироскопа в зависимости от фазового угла вращающегося магнитного поля синхронного гироскопа // Изв. АН СССР. Сер.: Механика твердого тела. – 1984. – №2. – С.3-7.
7. Исследование неустойчивости дрейфа гироскопа от изменения фазы вращения ротора // Делекторский Б.А., Правоторов Е.А., Соболева Е.Б., Тарасов В.Н., Яшукова В.В. // Тр. Моск. энерг. ин-та. – 1978. – Вып.361. – С. 34-41.

8. Климов Д.М., Харламов С.А. Динамика гироскопа в кардановом подвесе. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
9. Копылов И.А., Новожилов И.В. Погрешность поплавкового гироскопического прибора, обусловленная угловыми вибрациями электродвигателя вокруг собственной оси // Межведомств. сб. трудов. – М.: Моск. энерг. ин-т. – 1985. – №80. – С. 99-106.
10. Карипбаев С.Ж., Ландау Б.Е., Мартыненко Ю.Г., Подалков В.В. Зависимость угловой скорости электростатического гироскопа от температуры окружающей среды // Изв. РАН. МТТ. -1993. - №3. – С. 42-49.
11. Кобрин А.И., Сартаев К.З. Погрешности гироскопа с центральной сферической опорой, вызванные влиянием возмущающих моментов двигателя // Вестник МГТУ. Серия: Приборостроение. – 1994. - №2.– С.87-91.
13. Астахов В. И. К расчету силового воздействия магнитного поля на тела, несущие токи // Изв. Вузов. Электромеханика – 1984 .-№10. – С.5- 14. Ковалев М.П. Опоры и подвесы гироскопических устройств. – М.: Машиностроение, 1970. – 287 с.
15. Мартыненко Ю. Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях,— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.- 368 с , ISBN 5-02-013801-0.
16. Отчет о научно-исследовательской работе «Разработка бескардановых гироскопов с шаровым ротором на электростатическом и коподшипниковом подвесах», (промежуточный), Научный руководитель темы: к.т.н. Карипбаев С.Ж. УДК **531.383**; ГРНТИ **30.15.35**; № госрегистрации: 0112РК02743, АО Академия ГА, Алматы 2012-2014 г.
17. Алдамжаров К.Б., Сартаев К.З., Карипбаев С.Ж., Влияние температурных деформаций на угловую скорость полого ротора электростатического гироскопа //Известия Ошского технологического университета им. Академика Адышева (Ош). 2020г. ISBN – 1694-660X.

#### References

1. Delektorskii B.A., Novojilov I.V. K osenke uhodov giroskopa v zavisimosti ot fazovogo ugla vraegosya magnitnogo polya sinhronnogo girodviगतеля//Изв. AN SSSR. Ser.: Mehanika tverdogo tela.–1984.-№2.–S.3-7.
2. İssledovanie nestabilnosti dreifa giropribora ot izmeneniya fazy vraeniya rotora / Delektorskii B.A., Pravotorov E.A., Soboleva E.B., Tarasov V.N., Яшукова V.V. // Tr. Mosk. energ. in-ta. – 1978. – Vyp.361. – S. 34-41.
3. İssledovanie nestabilnosti dreifa giropribora ot izmeneniya fazy vraeniya rotora / Delektorskii B.A., Pravotorov E.A., Soboleva E.B., Tarasov V.N., Яшукова V.V. // Tr. Mosk. energ. in-ta. – 1978. – Vyp.361. – S. 34-41.
4. Astahov V. I. K raschetu silovogo vozdeistviya magnitnogo polya na tela, nesuie toki // İzv. Vuzov. Elektromehaniка – 1984 .-№10. – S.5-14
5. Kopylov I.A. Pogrešnosti giroskopicheskikh priborov, opredelyemye nesovershenstvami elektrodviगतеля rotora // Avtoreferat dissertatsii na soiskanie uchenoi stepeni kandidata fiz.-mat. nauk. M., 1986.
6. Delektorskii B.A., Novojilov I.V. // K osenke uhodov giroskopa v zavisimosti ot fazovogo ugla vraegosya magnitnogo polya sinhronnogo girodviगतеля//Изв. AN SSSR. Ser.: Mehanika tverdogo tela.–1984.- №2.–S.3-7.
7. İssledovanie nestabilnosti dreifa giropribora ot izmeneniya fazy vraeniya rotora // Delektorskii B.A., Pravotorov E.A., Soboleva E.B., Tarasov V.N., Яшукова V.V. // Tr. Mosk. energ. in-ta. – 1978. – Vyp.361. – S. 34-41.
8. Klimov D.M., Harlamov S.A. Dinamika giroskopa v kardanovom podvесе. – М.: Nauka, 1978. – 208 s.
9. Kopylov I.A., Novojilov I.V. Pogrešnost poplavkovogo giroskopicheskogo pribora, obuslovlennaya uglovymi vibrasiyami elektrodviगतеля vokrug sobstvennoi osi // Mejvedomstv. sb. trudov. – М.: Mosk. energ. in-t. – 1985. – №80. – S. 99-106.

10. Karipbaev S.J., Landau B.E., Martynenko .G., Podalkov V.V. Zavisimost uglovoi skorosti elektrostatičeskogo giroskopa ot temperatury okružaei sredy // *Ízv. RAN. MTT.* -1993. - №3. – S. 42-49.
11. Kobrin A.Í., Sartaeв K.Z. Pogrešnosti giroskopa s sentralnoi sferičeskoj oporoi, vyzvannye vlianiem vozmuaiih momentov dvigatelya // *Vestnik MGTU. Seria: Priborostroenie.* – 1994. - №2.– S.87-91.
13. Astahov V. Í. K rasčetu silovogo vozdeistvija magnitnogo polja na tela, nesuie toki // *Ízv. Vuzov. Elektromehanika* – 1984 .-№10. – S.5- 14. Kovalev M.P. Oporы i podvesy giroskopicheskih ustroistv. – M.: Mašinstroenie, 1970. – 287 s.
15. Martynenko . G. Dvijenie tverdogo tela v električeskih i magnitnyh poljah,— M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1988.- 368 s , ISBN 5-02-013801-0.
16. Otchet o nauchno-issledovatel'skoj rabote «Razrabotka beskardanovyh giroskopov s šarovym rotorom na elektrostatičeskom i kopodšipnikovom podvesah», (promejutočnyi) ,Nauchnyi rukovoditel temy: k.t.n. Karipbaev S.J. UDK 531.383; GRNTI 30.15.35; № gosregistrasii: 0112RK02743, AO Akademiya GA, Almaty 2012-2014 g.
17. Aldamjarov K.B., Sartaeв K.Z., Karipbaev S.J., Vlianie temperaturnyh deformasii na uglovu skorost pologo rotora elektrostatičeskogo giroskopa // *Ízvestija Ošskogo tehnologičeskogo universiteta im. Akademika Adyševa (Oš).* 2020g. ISBN – 1694-660H.